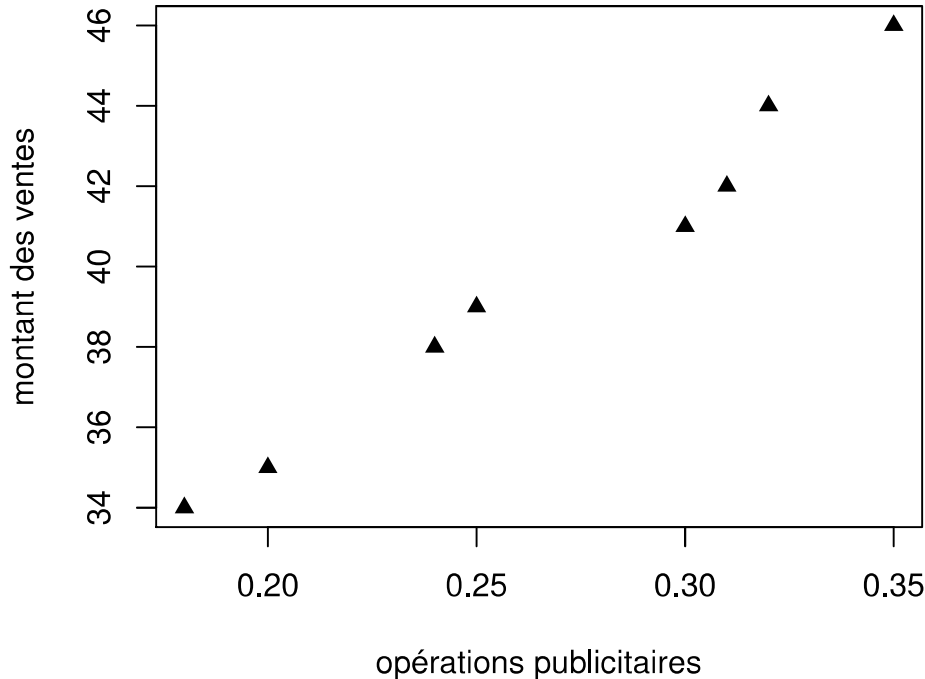


**Exemple:** On considère la série des opérations publicitaires et le montant des ventes (exemple précédent). La représentation graphique de cette série est la suivante:



Il est clair que tous les points du nuage de cette série semblent presque alignés. Soit  $(\Delta) : Y = aX + b$  la droite de l'ajustement linéaire de cette série. Les valeurs, par la méthode des moindres carrés, de  $a$  et  $b$  sont:

$$a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}, b = \bar{Y} - a\bar{X}.$$

Calculons  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\sigma_X$  et  $\sigma_{XY}$ .

### 3.3 Série chronologique.

#### 3.3.1 Définition et exemples.

**Définition 3.3.1** La série chronologique est une série à deux entrée, dont l'un des deux caractères est le temps (jours, mois, année,...) et on la note  $(X_t)$ .

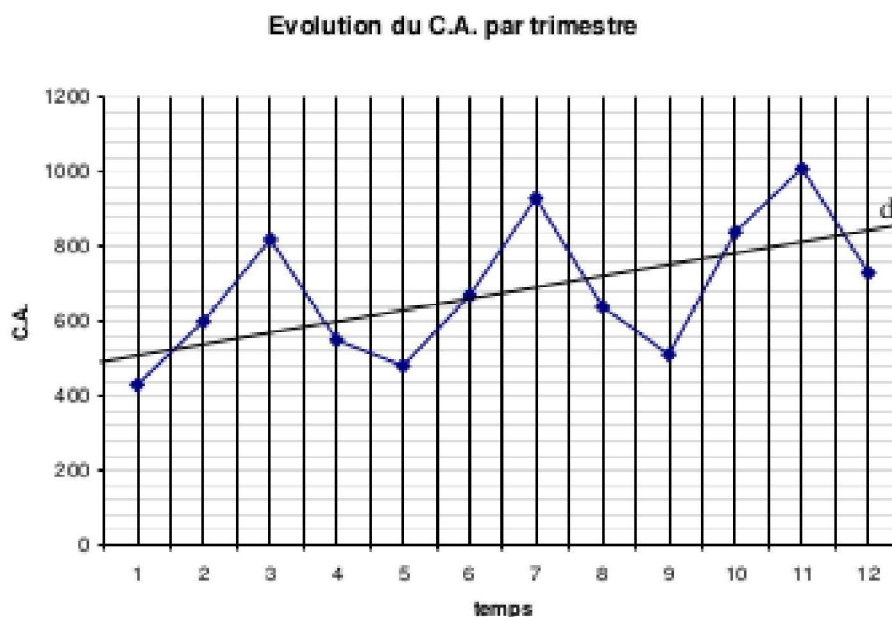
#### Exemple 1

- 1)- cours journalières d'une action en bourse.
  - consommation mensuelle d'électricité.
  - nombre trimestriel de chômeurs.
  - chiffre annuel des bénéfices des exportations.

2)- Considérons la série trimestrielle du chiffre d'affaires en milliers de dirhams des ventes d'un magasin de 1978 à 1982:

	année 1	année 2	année 3
<i>trim.1</i>	430	480	510
<i>trim.2</i>	600	670	840
<i>trim.3</i>	820	930	1010
<i>trim.4</i>	550	640	730

La représentation graphique de cette série est la suivante:



### 3.3.2 Les composantes d'une série chronologique.

Le but de la décomposition d'une série chronologique est de distinguer dans l'évolution de la série, une tendance, des variations saisonnières qui se répètent chaque année (semestre, trimestre, mois,...) et des variations accidentelles imprévisibles.

L'intérêt de ceci est d'une part de mieux comprendre, de mieux décrire l'évolution de la série, et d'autre part de prévoir son évolution (à partir de la tendance et des variations saisonnières).

**a- La tendance ou composante tendancielle ( $T_t$ ):** qui correspond à l'évolution à long terme de la série, l'évolution fondamentale de la série. Généralement, elle est linéaire:  $T_t = at + b$ .

**b- La composante saisonnière ( $S_t$ ):** qui correspond aux variations saisonnières (par exemple: les fluctuations périodiques à l'intérieur d'une année).

- c- **La composante résiduelle** ( $\varepsilon_t$ ): correspond à des fluctuations irrégulières et imprévisibles. Elles sont supposées en général de faible amplitude.

### 3.3.3 Les modèles de décomposition d'une série.

#### a- Modèle additif.

**Définition 3.3.2** Soit  $(Y_t)$  une série chronologique. On dit que  $(Y_t)$  suit un modèle additif si et seulement si  $Y_t$  s'écrit

$$Y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$

, où  $(T_t)$  est une tendance,  $(S_t)$  est une composante saisonnière, et  $(\varepsilon_t)$  est la composante résiduelle et qui sont supposées indépendantes deux à deux.

#### Propriétés 3.3.1

- 1- Graphiquement, l'amplitude des variations des termes de la série, est constante autour de la tendance.
- 2- Le modèle additif est convenable à une série chronologique si la droite passant par les minima du graphe de la série, et celle passant par les maxima, sont à peu près parallèles (voir Figure 4.1 comme exemple).

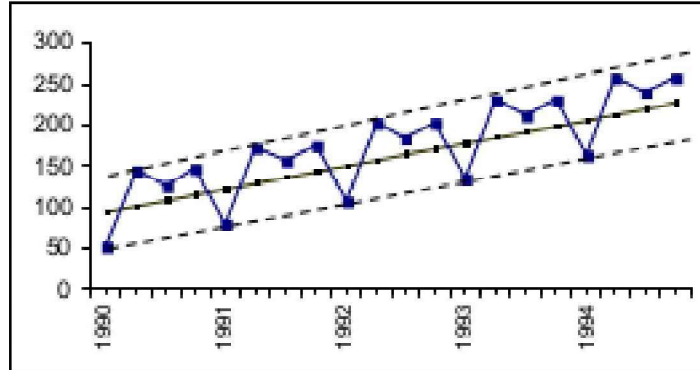


Figure 3.1:

#### b- Modèle multiplicatif.

**Définition 3.3.3** Soit  $(Y_t)$  une série chronologique. On dit que  $(Y_t)$  suit un modèle multiplicatif si et seulement si  $Y_t$  s'écrit

$$Y_t = T_t \times S_t + \varepsilon_t$$

, où  $(T_t)$  est une tendance,  $(S_t)$  est une composante saisonnière (on suppose que  $(S_t)$  dépend de  $(T_t)$ ), et  $(\varepsilon_t)$  est la composante résiduelle.

#### Propriétés 3.3.2

- 1- Graphiquement, l'amplitude des variations des termes de la série, varie en fonction du temps.
- 2- Le modèle multiplicatif est convenable à une série chronologique si la droite passant par les minima du graphe de la série, et celle passant par les maxima, ne sont pas parallèles (voir Figure 4.2 comme exemple).

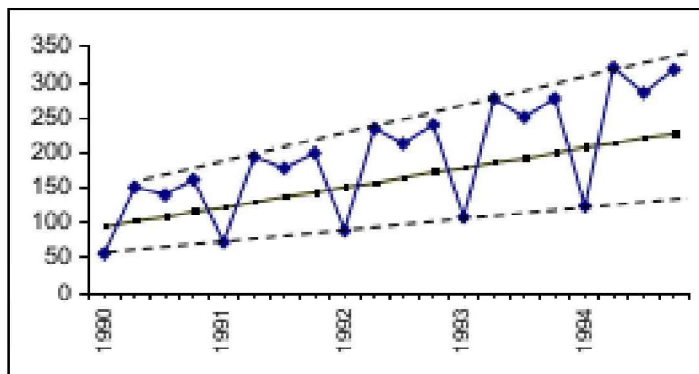


Figure 3.2:

### 3.3.4 Prédiction.

#### a- Détermination de la tendance ( $T_t$ ):

**Proposition 3.3.1** Les coefficients  $a$  et  $b$  de la tendance  $T_t = at + b$  pour les deux modèles additif et multiplicatif, sont

$$a = \frac{\text{cov}(T, Y)}{V(T)}, b = \bar{Y} - a\bar{T},$$

où

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i, \bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i,$$

$$\text{cov}(T, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i t_i - \bar{Y}\bar{T}, V(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^2 - \bar{T}^2.$$

**Exemple 2** Cherchons la tendance pour la série de l'exemple 1 précédent: La première chose à faire, il faut indexer les trimestres des trois années. Le tableau obtenu est le suivant:

temps	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
chiffre d'affaires	430	600	820	550	480	670	930	640	510	840	1010	730

On a

$$\bar{Y} = \frac{1}{12} (430 + 600 + 820 + 550 + 480 + 670 + 930 + 640 + 510 + 840 + 1010 + 730) = 684.1667,$$

$$\bar{T} = \frac{1}{12}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = 6.5,$$

$$\begin{aligned} cov(T, Y) &= \frac{1}{12} (430 \times 1 + 600 \times 2 + 820 \times 3 + 550 \times 4 + 480 \times 5 + 670 \times 6 + 930 \times 7 \\ &\quad + 640 \times 8 + 510 \times 9 + 840 \times 10 + 1010 \times 11 + 730 \times 12) - \bar{Y}\bar{T} \\ &= 4766.667 - 684.1667 \times 6.5 \\ &= 319.5831, \end{aligned}$$

$$V(T) = \frac{1}{12} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2) - 6.5^2 = 11.91667.$$

Donc les coefficients de la tendance sont

$$a = \frac{319.5831}{11.91667} = 26.81815, \quad b = 684.1667 - 26.81815 \times 6.5 = 509.8487$$

Par conséquent la tendance est  $T_t = 26.81815t + 509.8487$ .

#### b- Détermination de la composante saisonnière.

**Etape 1:** On calcule les coefficients saisonniers  $S_{ij} = Y_{ij} - T_{ij}$  (par exemple:  $i$  c'est l'année et  $j$  c'est la saison (trimestre, semestre,...)) si le modèle est additif, ou  $S_t = \frac{Y_t}{T_t}$  si le modèle est multiplicatif.

**Etape 2:** Pour chaque saison  $j$  (trimestre, semestre,...), on calcule la composante saisonnière brute  $s_j$  correspondant et qui est la moyenne des coefficients saisonniers en cette saison.

**Etape 3:** On centre la composante saisonnière brute pour avoir finalement la composante saisonnière qu'on va utiliser dans le modèle.

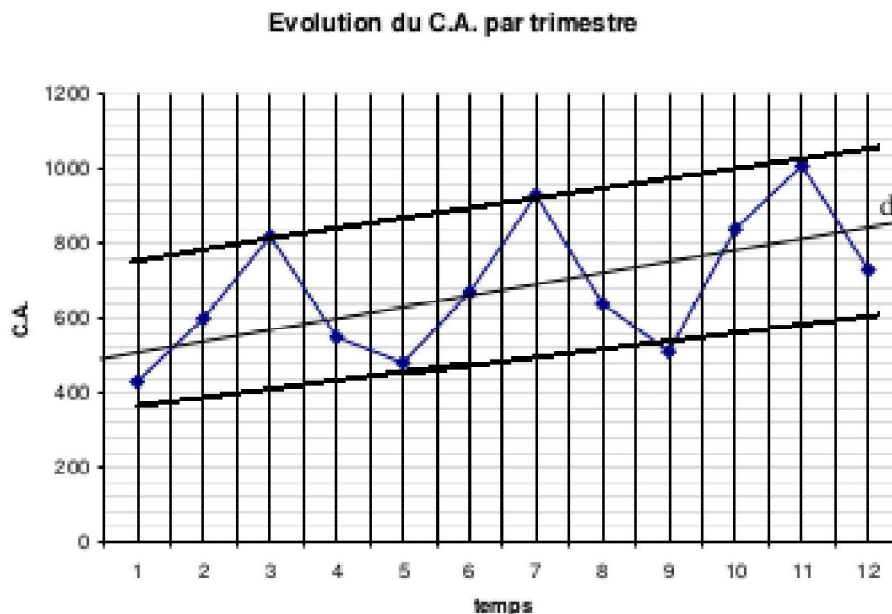
**Exemple 3** Cherchons la composante saisonnière de la série de l'exemple 1. Tout d'abord quel est le modèle (additif ou multiplicatif) convenable pour cette série. Le graphique suivant montre que les droites passant par les minima et les maxima de la série sont parallèles. Par conséquent le modèle additif est convenable:

Le tableau de la tendance est:

temps	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
chiffre d'aff.	430	600	820	550	480	670	930	640	510	840	1010	730
Tendance	537	563	590	617	644	671	698	724	751	778	805	832

Donc le tableau des coefficients saisonniers et la composante saisonnière brute est le suivant:

	année 1	année 2	année 3	C.S.B	C.S.
trim.1	-107	-164	-241	-170.67	-133.505
trim.2	37	-1	62	32.67	69.835
trim.3	230	232	-241	73.67	110.835
trim.4	-67	-84	-102	-84.33	-47.165



La moyenne de C.S.B est  $\frac{1}{4}(-170.67 + 32.67 + 73.67 - 84.33) = -37.165$ . Donc la composante saisonnière qu'on va utiliser dans le modèle est C.S..

### c- Prédiction.

Soit  $t$  un temps donné. La valeur prédite de  $Y_t$  est  $\hat{Y}_t = at + b + S_i$ , où  $i$  est la saison qui correspond à  $t$ .

**Exemple 4** On veut prédire la valeur du chiffre d'affaires pour l'année 4 en trimestre 4. Le  $t$  ici est  $t = 16$ . Donc  $T_t = 26.81815 \times 16 + 509.8487 = 938.9391$  et  $S_i = S_4 = -47.165$ . Ce qui donne  $\hat{Y}_t = 938.9391 - 47.165 = 891.7741$ .



# Régression linéaire

## 3ème exemple

$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
4	6	24	-2	-7	14	4
5	13	65	-1	0	0	1
7	13	91	1	0	0	1
8	20	160	2	7	14	4
Tot		340			28	10

$$\bar{x} = \frac{4+5+7+8}{4} = 6 \quad ; \quad \bar{y} = \frac{6+13+13+20}{4} = 13$$

$$\text{Covariance : } \text{cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{28}{4} = 7$$

$$\text{la variance } V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{10}{4} = 2,5$$

coefficient de régression (= la pente) ( $y = bx + a$ )

$$b = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{7}{2,5} = 2,8$$

la droite de régression passe par le point  $(\bar{x}; \bar{y}) = (6; 13)$

$$\text{donc } \bar{y} = b\bar{x} + a \Rightarrow 13 = 2,8 \times 6 + a \Rightarrow a = 13 - 2,8 \times 6$$

$$\Rightarrow a = -3,8$$

d'où  $y = 2,8x - 3,8$  est l'équation de la droite de régression.



Le coefficient de Corrélation.

$$R = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\text{avec } \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,5}$$

$$\text{et } \sigma_y = \sqrt{V(Y)} \quad \text{où } V(Y) = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{4} = \frac{(-7)^2 + 0^2 + 0^2 + 7^2}{4} \\ = \frac{98}{4} = 24,5$$

$$\text{Donc } \sigma_y = \sqrt{24,5}$$

$$\Rightarrow R = \frac{7}{\sqrt{2,5} \sqrt{24,5}} = 0,89$$

Application

$$\text{lorsque } x_i = 14 \Rightarrow y_i = 35,4$$

$$\text{lorsque } y = 25$$

$$25 = 2,8x - 3,8$$

$$\Rightarrow x = \frac{25 + 3,8}{2,8} = 10,29$$