

Chapitre 3

Variables aléatoires

3.1 Introduction.

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat d'une épreuve peut se traduire par une grandeur mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel.

La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de variable aléatoire. Ainsi le pourcentage de réponses (oui) à une question posée dans un sondage, ou le taux de croissance d'un indice économique, sont des exemples de variables aléatoires.

On se limitera dans ce chapitre au cas des variables aléatoires réelles (compris les entiers puisqu'ils sont des réelles).

Définition 3.1.1 Ω étant l'univers des éventualités dans une expérience aléatoire, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r) sur Ω toute application X telle que

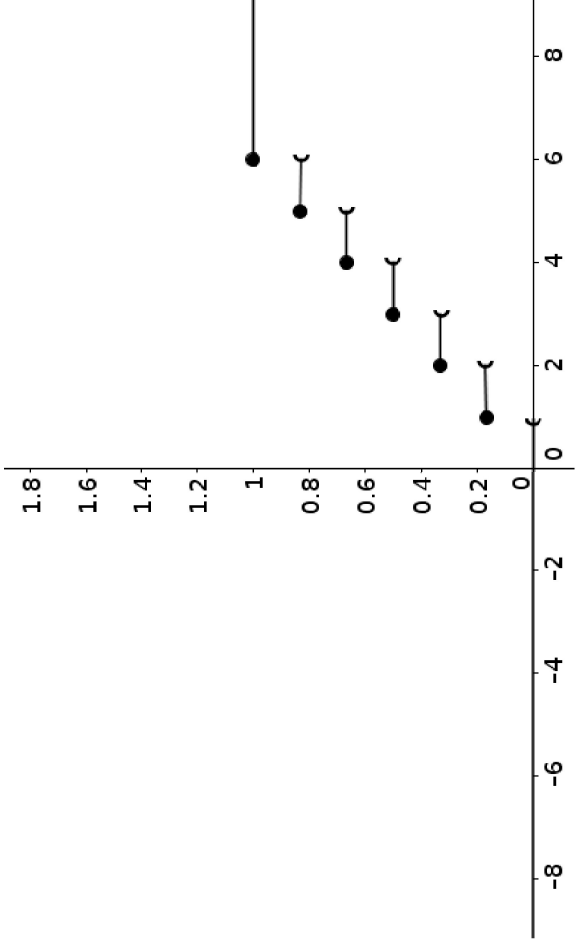
$$\begin{array}{ccc} X : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega_i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

$X(\Omega)$ présente l'ensemble des valeurs prises par X .

Remarque 3.1.1 Il y a deux cas qui se présente pour $X(\Omega)$:

- 1- Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou s'il peut être mis en bijection avec \mathbb{N} , alors on parle d'une v.a.r discrète.
- 2- Si $X(\Omega)$ est un intervalle de \mathbb{R} ou s'il peut être mis en bijection avec \mathbb{R} , alors on dit que la v.a.r X est continue.

Commençons par les variables aléatoires discrètes, leur définition et leurs propriétés.

Figure 3.1: Fonction de répartition de X .

La fonction de répartition de X , est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6}, & 5 \leq x < 6 \\ 1, & 6 \leq x \end{cases}.$$

La représentation graphique de la fonction F , est la suivante (voir la figure 3.1).

Définition 3.2.3 (Espérance mathématique)

Soit X une v.a.r discrète.

- 1- L'espérance mathématique de X est la moyenne des valeurs prises par la variable pondérées par leurs probabilités. On la note $E(X)$ et on a

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

- 2- La variance de X est la moyenne de l'écart des valeurs de la variable par rapport à $E(X)$.

On a

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x).$$

3- L'écart-type de X , noté $\sigma(X)$, est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés 3.2.1 Soient X et Y deux v.a.r discrètes. On a les propriétés suivantes:

$$1- \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} E(X + Y) = E(X) + E(Y) \\ E(aX) = aE(X) \end{cases}.$$

$$2- V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Exemple 3: On considère l'expérience de l'exemple 2. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.
D'après le tableau de la loi de probabilité de X , on a:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} \\ &= \frac{21}{6} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} + 25 \times \frac{1}{6} + 36 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} - \frac{49}{4} \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} \\ &= \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

3.3 Variables aléatoires continues.

3.3.1 Définition et exemples.

Définition 3.3.1 Une variable aléatoire est continue si elle prend n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné.

Exemple:

Le poids, la taille et le taux de glucose dans le sang, sont des variables continues.

3.3.2 Fonction densité de probabilité.

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X , la loi de probabilité à chaque ensemble de valeurs définie dans un intervalle donné. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité de l'événement $(X = a)$ est nulle car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

On considère alors la probabilité que la v.a.r X prenne des valeurs d'un intervalle $[a, b]$ telle que $P(a \leq X \leq b)$. Lorsque la longueur $(b - a)$, de l'intervalle $[a, b]$, tend vers 0, la probabilité des valeurs prises par X , tend vers une fonction que l'on appelle fonction densité de probabilité.

Définition 3.3.2 On appelle densité de probabilité toute fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) ,$$

telle que : $\bullet \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Cette fonction f définit une loi de probabilité.

Exemple 1:

On considère les fonctions f et g qui sont définies sur \mathbb{R} par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a : $\bullet \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$.

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1 \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x}dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t} + 1) \\ &= 1 \text{ car } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0. \end{aligned}$$

Finalement, f et g sont deux densités de probabilité.

3.3.3 Fonction de répartition.

Définition 3.3.3 Soit X une variable aléatoire continue de fonction densité de probabilité f .

La fonction de répartition, notée F_X , de la v.a.r continue X est définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx.$$

Proposition 3.3.1 Soit F_X une fonction de répartition d'une v.a.r continue X de densité de probabilité f . On a :

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$.

Remarque 3.3.1

- 1- On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(X \leq t) = P(X < t)$.
- 2- La fonction de répartition correspond aux probabilités cumulées associées à la variable aléatoire continue sur l'intervalle d'étude.

Propriétés 3.3.1 Soit F_X une fonction de répartition d'une v.a.r continue X de densité de probabilité f . Les propriétés suivantes sont satisfaites:

- 1- F_X est continue sur \mathbb{R} .
- 2- Si f est continue, alors F_X est dérivable sur \mathbb{R} .
- 2- F_X est croissante sur \mathbb{R} .
- 3- F_X est à valeur dans $[0, 1]$.
- 4- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.

Exemple 2:

On considère deux v.a.r continues X et Y dont les densités de probabilités sont respectivement f et g .

Cherchons leurs fonctions de répartition F_X et F_Y . On a :

$$\begin{aligned}
 \bullet \forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) &= \int_{-\infty}^t f(x)dx \\
 &= \begin{cases} \int_{-\infty}^t 0dx, t \in]-\infty, 0] \\ \int_0^t 1dx, t \in [0, 1] \\ \int_0^1 1dx, t \in [1, +\infty[\end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, t \in]-\infty, 0] \\ [x]_0^t, t \in [0, 1] \\ 1, t \in [1, +\infty[\end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, t \in]-\infty, 0] \\ t, t \in [0, 1] \\ 1, t \in [1, +\infty[\end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \forall t \in \mathbb{R}, F_Y(t) &= \int_{-\infty}^t g(x) dx \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^t 0 dx, & t \in]-\infty, 0] \\ \int_0^t e^{-x} dx, & t \in [0, +\infty[\end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & t \in]-\infty, 0] \\ [-e^{-x}]_0^t, & t \in [0, +\infty[\end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & t \in]-\infty, 0] \\ 1 - e^{-t}, & t \in [0, +\infty[\end{cases}
\end{aligned}$$

3.3.4 Espérance mathématique et variance.

Définition 3.3.4 Si X est une v.a.r continue de densité de probabilité f , alors :

1- l'espérance mathématique de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

2- la variance de X est

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \right) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

Exemple 3:

Soient X et Y les deux v.a.r continues de l'exemple 2. Calculons $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$. On a :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx & \bullet \quad V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 \\
&= \int_0^1 x dx & &= \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 & &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} & &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
& & &= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x e^{-x} dx.
\end{aligned}$$

Calculons, par intégration par partie l'intégrale $\int_0^t x e^{-x} dx$.

On pose : $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{-x}, \end{cases}$ alors : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x}. \end{cases}$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^t x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^t + \int_0^t e^{-x} dx \\
&= -t e^{-t} - [e^{-x}]_0^t \\
&= -t e^{-t} + 1 - e^{-t} \quad (1)
\end{aligned}$$

Donc : $E(Y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$.

$$\begin{aligned}
\bullet V(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx - (E(Y))^2 \\
&= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - 1 \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x^2 e^{-x} dx - 1.
\end{aligned}$$

Calculons par intégration par partie l'intégrale $\int_0^t x^2 e^{-x} dx$.

On pose : $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^{-x}, \end{cases}$ alors : $\begin{cases} u' = 2x \\ v = -e^{-x}. \end{cases}$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^t x^2 e^{-x} dx &= [-x^2 e^{-x}]_0^t + \int_0^t 2x e^{-x} dx \\
&= -t^2 e^{-t} + 2(-t e^{-t} + 1 - e^{-t}) \quad (\text{d'après (1)}) \\
&= 2 - t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
V(Y) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (2 - t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t}) - 1 \\
&= 2 - 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3.4 Couples des variables aléatoires discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω telles que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

3.4.1 Loi conjointe.

Définition 3.4.1 On appelle loi conjointe du couple (X, Y) , toute application

$$\begin{aligned} h: X(\Omega) \times Y(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_i, y_j) &\longmapsto p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1 1-La loi de probabilité d'un couple (X, Y) , peut être présentée par le tableau suivant:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_j	\dots	y_m	Loi de X
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2j}	\dots	p_{2m}	$p_{2.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{im}	$p_{i.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	p_{n1}	p_{n2}	\dots	p_{nj}	\dots	p_{nm}	$p_{n.}$
Loi de Y	$p_{.1}$	$p_{.2}$	\dots	$p_{.j}$	\dots	$p_{.m}$	1

2-

- La loi de X est définie par: $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij}$. Elle est appelée la loi marginale de X .
- La loi de Y est obtenue de la même manière: $P(Y = y_j) = p_{.j} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$, et elle est appelée aussi la loi marginale de Y .

Application:

Une urne contient 4 boules blanches et deux boules noires. On tire simultanément 2 boules de cette urne.

Soit X la v.a.r qui vaut le nombre de boules noires tirées. Soit Y la v.a.r qui prend comme valeur, le nombre de couleur obtenue dans un tirage.

1- Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

2- Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) et déduire les lois marginales de X , Y et la loi de XY .

3- Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Réponse:

1- On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.